

## 2ème session : correction.

### Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

#### Exercice 2 (6 points)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction **impaire** et  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = \sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$ . On admet qu'elle est  $C^1$  par morceaux. On rappelle que les coefficients de Fourier de  $f$   $2\pi$ -périodique continue par morceaux sont donnés par l'intégrale sur une période ( $a$  au choix)

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos(nx) f(x) dx \quad (n \geq 0); \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin(nx) f(x) dx \quad (n \geq 1).$$

1. Tracer le graphe de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .
2. Déterminer les coefficients de Fourier constituant la série de Fourier  $Sf$  de  $f$ .
3. Pour quels  $x$  est-ce que cette série est convergente ? Pour quels  $x$  a-t-on  $Sf(x) = f(x)$  ?

#### Correction Exercice 2

1. On fait une symétrie par rapport à l'origine pour étendre la fonction impaire sur la période  $[-\pi, \pi]$ . Ensuite, on décale de  $2\pi$  vers la gauche et la droite. En bref, ça ressemble à  $\sin$  mais plus arrondi dans les multiples de  $\pi$ .
2. La fonction est impaire donc tous les  $a_n$  sont nuls. D'autre part, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (2 \sin(nx) - \sin((n+2)x) - \sin((n-2)x)) dx \end{aligned}$$

Pour  $n \neq 0, 2$  on a donc :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-1}{2\pi} \left[ 2 \frac{\cos(n\pi) - 1}{n} - \frac{\cos((n+2)\pi) - 1}{n+2} - \frac{\cos(-(n-2)\pi) - 1}{n-2} \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left[ \frac{2((-1)^n - 1)}{n} - \frac{(-1)^{n+2} - 1}{n+2} - \frac{(-1)^{n-2} - 1}{n-2} \right] = \frac{1 - (-1)^n}{\pi} \left[ \frac{2}{n} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right] \end{aligned}$$

Donc  $b_n = 0$  si  $n$  pair (en étudiant à part les cas  $n = 0, 2$ ) et  $b_n = -16/\pi(n^3 - 4n)$  si  $n$  impair.

3. La fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux. De plus  $f$  est continue (voir graphe). Donc  $Sf$  est partout convergente et vaut partout  $f$ .

**Exercice 3 (4 points)** Est-ce que les **suites** de fonctions suivantes convergent uniformément pour  $x \in [0, 1]$  ? Si oui, donner la limite.

1.  $u_n(x) = e^{-nx}$ ,  $n \geq 0$ .
2.  $v_n(x) = \frac{1}{n(x+1)}$ ,  $n \geq 1$ .

**Correction Exercice 3**

1. La limite simple vaut 0 pour  $x > 0$  et 1 pour  $x = 0$ . Il s'agit donc d'une limite qui n'est pas continue d'une suite de fonctions continues. Cela signifie qu'il ne peut pas y avoir de convergence uniforme.
2. La limite simple est 0 pour tout  $x$ . En plus cette limite est uniforme car pour tout  $x \in [0, 1]$  on a :

$$|v_n(x) - 0| \leq 1/n,$$

et  $1/n$  tend uniformément vers 0.